**Tema 4.1. Densidad Conjunta y Marginal-Discreta.**

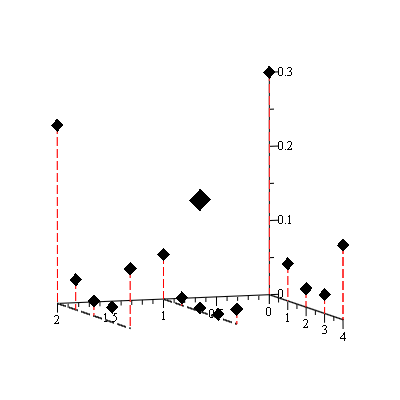
**Motivación del tema.** Cuando un automóvil es detenido por una patrulla, se revisa el desgaste de cada neumático y cada faro delantero se verifica para ver si está correctamente alineado. Denotemos por el número de faros delanteros que necesitan ajuste y por el número de neumáticos defectuosos. Supongamos que

=probabilidad de que faros necesiten ajuste y neumáticos estén defectuosos, donde y

Estas probabilidades están dadas en la siguiente tabla

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X \ Y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |

Podemos representar está función de densidad conjunta de y en el espacio tridimensional como:



Con la tabla se puede comprobar que la suma de las alturas de estos puntos es 1 o

También podemos calcular la probabilidad de haya más de 0.5 faros que necesiten ajuste y entre 1 y 3 llantas defectuosas con , para ello simplemente sumamos las alturas de los puntos cuyas abscisas son mayores o iguales a 0.5 y sus ordenadas están entre 1 y 3, esto nos da

Esta suma corresponde a sumar los números que están en la región sombreada de la siguiente tabla:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X \ Y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |

**Definición 1. Función de Densidad Conjunta Discreta.** Sean variables aleatorias discretas con recorridos

y

La función de densidad conjunta de y es la función definida en el producto cartesiano de y , por

La función de densidad conjunta generalmente se da como una tabla

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| | |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

**Propiedades de la Función de Densidad Conjunta.**

1. , para toda
2. , donde es una región del plano .

**Definición 2. Funciones de Densidad Marginales de y .**

. Sumar sobre el renglón

. Sumar sobre la columna

**Ejemplo 3.** Cuando un automóvil es detenido por una patrulla, se revisa el desgaste de cada neumático y cada faro delantero se verifica para ver si está correctamente alineado. Denotemos por el número de faros delanteros que necesitan ajuste y por el número de neumáticos defectuosos.

1. Si y son independientes con , y y , , y . Escriba la función de densidad conjunta de y con una tabla.
2. Calcular y verifica que es igual .
3. ¿Cuál es la probabilidad de no violaciones .
4. Compruebe que la suma de los números del segundo renglón nos da y así con los demás renglones y columnas.

**Solución.** Para (a) hacemos la tabla utilizando la independencia de las variables aleatorias, que quiere decir que . Así en cada celda de la tabla ponemos el producto de las densidades marginales de y

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X \ Y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |

Para (b) hacemos la suma

Mientras que

Para (c) la respuesta es

Para (d) si sumamos los números del segundo renglón obtenemos

**Ejemplo 3.** La función de densidad conjunta de 2 variables aleatorias y está dada por

1. Encontrar el valor de la constante .
2. Encontrar
3. Encontrar

**Solución. (a)** Con la ecuación de primero llenamos la siguiente tabla

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0 | c | 2c | 3c |
| 1 | 2c | 3c | 4c | 5c |
| 2 | 4c | 5c | 6c | 7c |

Ahora como la suma de las casillas debe ser 1 obtenemos la ecuación:

**(b)** De la tabla obtenemos .

**(c)**También de la tabla obtenemos

**Ejercicios.**

1. Si la distribución de probabilidad conjunta de y está dada por

, para

Encuentre (a) , (b) , (c) , (d)

Ayuda: para obtenga todas las parejas tales que y sume sus probabilidades dadas por .

Respuesta: (a) 1/5, (b) 7/30, (c) 3/5, (d) 4/15